ROLL NO.....

BA3BS3M01/22

ANNUAL EXAMINATION, 2022

B.A./B.Sc.-III

MATHEMATICS

PAPER-I

ANALYSIS

TIME: 3 HOURS **Maximum: 50**
Minimum: 17

नोट:- प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल करो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
Note: Solve any two parts from each unit. All questions carry equal marks.

इकाई–1/Unit-1

प्र.1. (a) मर्टेन्स प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए

State and prove Mertens theorem.

(b) दर्शाइए कि फलन

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

स्वार्ज प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट नहीं करता है तथा

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

BA3BS3M01/22

Show that the function

$$f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$$

$$f(0,0)=0$$

does not satisfy conditions of Schwarz's theorem and

$$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$$

(c) अंतराल $(-\ell,\ell)$ में $f(x)=e^{-x}$ के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series of $f(x)=e^{-x}$ in the interval $(-\ell,\ell)$

इकाई–2/Unit-2

प्र.2. (a) मानलो $f:[a,b]\to R,[a,b]$ पर एक परिबद्ध फलन है। तब $f,R-$ समाकलनीय है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\in>0$ के लिए, $[a,b]$ के एक विभाजन P का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$U(P,f)-L(P,f)<\in$$

Let $f:[a,b]\to R$ is a bounded function on $[a,b]$. Then f is R-integrable if and only if for every $\in>0$, there exists a partition *P* of $[a,b]$ such that

$$U(P,f)-L(P,f)<\in$$

(c) बनाख संकुचन सिद्धांत का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Banach contraction principle.

इकाई–5/Unit-5

प्र.5. (a) बेयर संवर्ग प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Baire's category theorem.

(b) एक दूरिक समष्टि (X,d) संहत होता है यदि और केवल यदि X के संवृत्त उपसमुच्चयों का प्रत्येक संग्रह जो परिमित प्रतिच्छेदन गुणधर्म रखता है, का एक अरिक्स प्रतिच्छेदन होता है।

A metric space (X,d) is compact if and only if every collection of closed subsets of X having finite intersection property has non empty intersection.

(c) साधारण दूरिक समष्टि R में एक उपसमुच्चय $A\subseteq R$ संबंद्ध होता है, यदि और केवल यदि यह एक अंतराल हो।

A subset $A\subseteq R$ in the usual metric space *R* is connected if and only if it is an interval.

(b) फलन

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

के अभिसरण की व्याख्या कीजिए।

Discuss the convergence of the function

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

(c) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha}}{xe^x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\propto > -1$

Using differentiation with respect to parameter, find the value of $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx$ if $\propto > -1$

इकाई–3/Unit-3

प्र.3. (a) सिद्ध कीजिए कि $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$ =अचर तथा $amp\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ = अचर लंबकोणीय वृत्त है।

Prove that $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = constant$ and $amp\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = constant$ are orthogonal circles.

(b) दर्शाइए कि फलन $f(z) = e^{-z^{-4}}(z \neq 0)$ तथा $f(0), z = o$ पर विश्लेषिक नहीं है, यद्यपि उस बिंदु पर कौशी रीमान समीकरण संतुष्ट होते हैं।

Show that the function $f(z) = e^{-z^{-4}}(z \neq 0)$ and $f(0)$, is not analytic at $z = o$ although the Cauchy Riemann equations are satisfied at that point.

(c) दर्शाइये कि रूपांतरण $\mathrm{w} = \frac{5-4z}{4z-2}$, वृत्त $|z| = 1$ को w समतल में इकाई वृत्त में रूपांतरित करता हूँ। इस वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

Show that the transformation $\mathrm{w} = \frac{5-4z}{4z-2}$, transform the circle $|z| = 1$ into unit circle in the w plane. Find the centre of this circle

इकाई–4/Unit-4

प्र.4. (a) दिखाइए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय पूर्ण, क्रमित क्षेत्र नहीं होता है।

Show that the set of rational numbers is not ordered complete field.

(b) कैंटर सर्वनिष्ठ प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cantor's intersection theorem.